Современная теория информации

Лекция 5. Кодирование дискретных источников при неизвестной статистике

Беляев Евгений Александрович
eabelyaev@itmo.ru

Содержание лекции

ИТМО

1. Постановка задачи универсального кодирования;
2. Двухпроходное кодирование;
3. Нумерационное кодирование;
4. Адаптивное кодирование.

- Алгоритмы кодирования, такие как код Хаффмана или арифметическое кодирование предполагают знание распределения вероятностей символов источника.
- В реальных задачах данное распределение вероятностей ***не известно***.
  - Можно оценить распределение вероятностей и передать его декодеру (двухпроходное кодирование или off-line coding).
  - Можно оценивать распределение вероятностей адаптивно одинаковым образом на стороне кодера и декодера используя уже закодированные/декодированные символы (адаптивное кодирование или online coding).

- Предположим, что мы будем кодировать *стационарные источники*.
- Для стационарного источника мы можем вычислить энтропию H, которая является нижней границей средней скорости кодирования R.
- "Хорошие" методы универсального кодирования должны обеспечить скорость кодирования, близкую к скорости кодирования, достигаемой в случае, если распределение вероятностей известно.

Предположим, что

- $\Omega = \{\omega\}$ – множество моделей источников.
- Если Ω – множество дискретных постоянных источников, то каждая ω определяется распределением вероятностей $\boldsymbol{\theta}(\omega) = (\theta_1, ..., \theta_K)$
- ω, а значит и $\boldsymbol{\theta}$, неизвестны как кодеру, так и декодеру.

Введем следующие обозначения:

- $H(\omega)$ энтропия доя заданного ω.
- $\bar{R}_n(\omega)$ средняя по последовательности из n символов скорость кодирования для ω.
- $r_n(\omega) = \bar{R}_n(\omega) - H(\omega)$ – средняя избыточность для модели ω и длины последовательности n

Тогда, задача заключается в построении алгорима, который минимизирует

$$r_n(\Omega) = \max_{\omega \in \Omega} r_n(\omega).$$

Если $\lim_{n \to \infty} r_n(\Omega) = 0$, то такое кодирования является ***универсальным*** для множества Ω

При разработке алгоритма универсального кодирования, необходимо учитывать (как для кодера, так и для декодера):

- Задержку. В соответствии с этим критерием, алгоритмы разделяются на:
  - Двухпроходные (off-line) алгоритмы.
  - Адаптивные (on-line) алгоритмы.
- Сложность.
- Объём памяти.

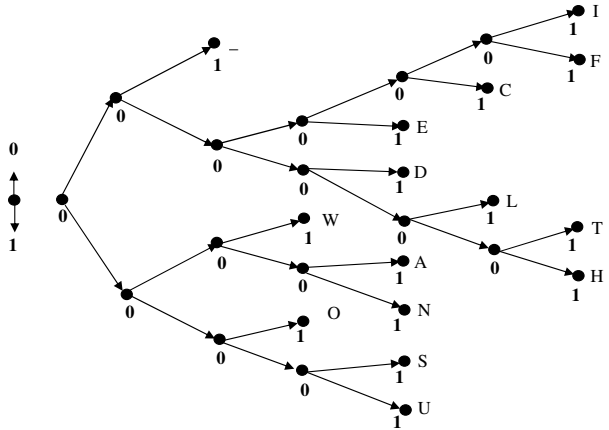
- Проход 1.
  1. Оценить $\boldsymbol{\theta}$ (обозначим оценку через $\hat{\boldsymbol{\theta}}$).
  2. Кодировать $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. На выходе получим кодовые слова $\boldsymbol{c}_1$.
- Проход 2.
  1. Кодировать символы источника $\boldsymbol{x}$ используя $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. На выходе получим кодовые слова $\boldsymbol{c}_2$.
  2. Сформировать кодовое слово из двух частей $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$.

IF_WE_CANNOT_DO_AS_WE_WOULD_WE_SHOULD_DO_AS_WE_CAN

$$I(\boldsymbol{x}) = I_1(\boldsymbol{x}) + I_2(\boldsymbol{x})$$

При равномерном кодировании получим 50×8=400 бит.

x	Число появлений x в $\boldsymbol{x}$, $\tau(x)$	Длина кодового слова, $l(x)$	Кодовое слово	$\tau(x) \times l(x)$
I	1	6	010000	6
F	1	6	010001	6
_	12	2	00	24
W	5	3	100	15
E	4	4	0101	16
C	2	5	01001	10
A	4	4	1010	16
N	3	4	1011	12
O	5	3	110	15
T	1	6	011110	6
D	4	4	0110	16
S	3	4	1110	12
U	2	4	1111	8
L	2	5	01110	10
H	1	6	011111	6
Всего $l_2(\boldsymbol{x})$				178 бит

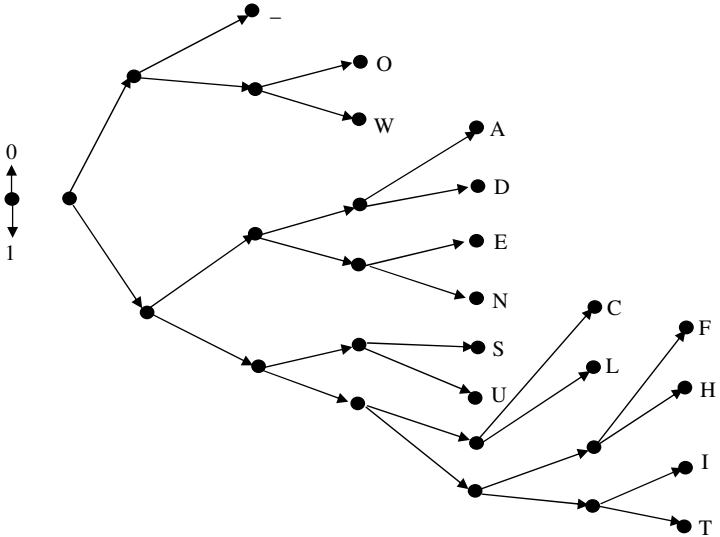


$$c_1 = (0\ 00\ 1000\ 001010\ 01101111\ 0110\ 1111,\ \mathrm{ASCII(x)}, ...)$$

$$l_1 = 29 + 8 \times 15 = 149 \text{ бит}, l = l_1 + l_2 = 149 + 178 = 327 \text{ бит}.$$

- Для заданного распределения вероятностей можно построить несколько одинаково эффективных кодов Хаффмана.
- Код Хаффмана называется ***каноническим***, если его короткие кодовые слова лексикографически предшествуют более длинным.

x	Длина кодового слова $l(x)$	Кодовое слово
_	2	00
O	3	010
W	3	011
A	4	1000
D	4	1001
E	4	1010
N	4	1011
S	4	1100
U	4	1101
C	5	11100
L	5	11101
F	6	111100
H	6	111101
I	6	111110
T	6	111111


–
O
W
A
D
E
N
S
U
C
L
F
H
I
T
0
1

- Достаточно указать количество концевых вершин для ярусов с номерами $0, ..., l_{max}$, где l_{max} – максимальная длина кодового слова.

Ярус	Число вершин	Число концевых вершин n_i	Диапазон значений n_i	Затраты в битах
0	1	0	0...1	1
1	2	0	0...2	2
2	4	1	0...4	3
3	6	2	0...6	3
4	8	6	0...8	4
5	4	2	0...4	3
6	4	4	0...4	3
Total				19

$\boldsymbol{c}_1 = (0\ 00\ 001\ 010\ 0110\ 010\ 100\ \mathrm{ASCII(x)}, ...)$

$$l_1 = 19 + 8 \times 15 = 139 \text{ бит}, l = l_1 + l_2 = 139 + 178 = 317 \text{ бит}.$$

Теорема. Полное кодовое дерево, имеющее M концевых вершин, имеет $M-1$ промежуточных вершин. Поэтому, $M+M-1=2M-1$ бит достаточно для описания полного описания дерева.

- $l_1(\boldsymbol{x}) \leq 2M - 1 + M\lceil \log M \rceil$
- $l_2(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} l(x_i) = \sum_{x \in X} \tau(x) l(x) = n \sum_{x \in X} \frac{\tau(x)}{n} l(x) = n \sum_{x \in X} \hat{\theta}(x) l(x) =$
  $n \mathrm{E}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}_n} \{l(x)\} \leq n(H(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) + 1)$
- $E\left(H(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)\right) \leq H\left(E(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)\right) = H(\theta) = H.$

- $\bar{R}(\boldsymbol{x}) = \frac{l_1(\boldsymbol{x}) + l_2(\boldsymbol{x})}{n} \leq H + 1 + \frac{2M - 1 + M\lceil \log M \rceil}{n}$

- Последовательность на выходе источника $\boldsymbol{x} \in X^n$, $X = \{0, 1, \ldots, M-1\}$.
- Композиция $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}) = (\tau_0(\boldsymbol{x}), ..., \tau_{M-1}(\boldsymbol{x}))$, $M = |X|$, где $\tau_0(\boldsymbol{x})$ – сколько раз встретился 0 во входной последовательности.

Кодирование:

- Кодовое слово $\boldsymbol{c}$ состоит из двух частей $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2)$.
- $\boldsymbol{c}_1$ описывает $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})$.
- $\boldsymbol{c}_2$ описывает номер $\boldsymbol{x}$ в лексикографически упорядоченном списке всех возможных $\{\boldsymbol{x}\}$, которые имеют композицию $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\tau}$.

1. Кодируем каждый $\tau_i(\boldsymbol{x})$, кроме $i = M-1$, прямым кодом, используя $\lceil \log(n+1) \rceil$ бит.

2. Представим композицию $\tau_0(\boldsymbol{x}), ..., \tau_{M-1}(\boldsymbol{x})$ как двоичную последовательность вида $0^{\tau_0}10^{\tau_1}1, ..., 10^{\tau_{M-1}}$, которая имеет длину $(n+M-1)$ и вес (количество единиц) $M-1$.
   - Количество строк такой же длины и веса: $N_\tau(n, M) = \binom{n+M-1}{M-1}$.
   - Лексикографически упорядочиваем все строки.
   - Кодируем равномерным кодом номер последовательности, используя $\lceil N_\tau(n, M) \rceil$ бит.

3. Упорядочим Q ненулевых компонент $\boldsymbol{\tau}$ по убыванию, т.е., $\tau_0 \in \{1, .., n\}$, $\tau_1 \in \{1, .., \tau_0\}$, $\tau_2 \in \{1, .., \tau_1\}$ и т.д.
   - $\boldsymbol{\tau}_Q$ кодируем АК с вероятностью $\frac{1}{n}\frac{1}{\tau_0}\frac{1}{\tau_1}\frac{1}{\tau_2}...\frac{1}{\tau_{Q-2}}$.
   - При помощи АК кодируем буквы, которые соответствуют компонентам композиции с вероятностью $\frac{1}{M}\frac{1}{M-1}\frac{1}{M-2}...\frac{1}{M-Q+2}$.

IF_WE_CANNOT_DO_AS_WE_WOULD_WE_SHOULD_DO_AS_WE_CAN

$n = 50,\ M = 256,\ Q = 15.$

1. $l_1 = 255 \times \lceil \log 50 \rceil = 255 \cdot 6 = 1530$ бит.
2. $l_1 = \left\lceil \log \binom{255+50}{255} \right\rceil = 193$ бит.
3. $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x}) = (12, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0 \ldots, 0)$

$$\begin{aligned} l_1 &= \lceil \log \left(50 \cdot 12 \cdot 5^2 \cdot 4^3 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \times 256 \cdot 255 \ldots \cdot 243\right) \rceil \\ &= 27 + 120 = 147 \text{ бит.} \end{aligned}$$

Пусть $M = 3$, и $\boldsymbol{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \tau_2)$. Тогда количество всех возможных $\boldsymbol{x}$ для $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})$

$$N(\boldsymbol{\tau}) = \binom{n}{\tau_0}\binom{n-\tau_0}{\tau_1} =$$

$$\frac{n!}{\tau_0!(n-\tau_0)!}\frac{(n-\tau_0!)}{\tau_1!(n-\tau_0-\tau_1)!} = \frac{n!}{\tau_0!\tau_1!\tau_2!}$$

В общем случае, для алфавмита объёмом M имеем:

$$N(\boldsymbol{\tau}) = \frac{n!}{\tau_0!\tau_1!\ldots\tau_{M-1}!}$$

IF_WE_CANNOT_DO_AS_WE_WOULD_WE_SHOULD_DO_AS_WE_CAN

$$l_2 = \left\lceil \log \frac{50!}{12!\,(5!)^2\,(4!)^3\,(3!)^2\,(2!)^3} \right\rceil = 150 \text{ бит.}$$

$$l = l_1 + l_2 = 147 + 150 = 297 \text{ бит.}$$

IF_WE_CANNOT_DO_AS_WE_WOULD_WE_SHOULD_DO_AS_WE_CAN

t	x	$\hat{p}(x)$	Композиция $\boldsymbol{\tau(x)}$
0	—	—	12,5,5,4,4,4,3,3,2,2,2,1,1,1,1
1	I	1/50	12,5,5,4,4,4,3,3,2,2,2,1,1,1,0
2	F	1/49	12,5,5,4,4,4,3,3,2,2,2,1,1,0
3	_	12/48	11,5,5,4,4,4,3,3,2,2,2,1,1
4	W	5/47	11,4,5,5,4,4,4,3,3,2,2,2,1,1
5	E	4/46	11,4,5,5,3,4,4,3,3,2,2,2,1,1
6	_	10/45	10,4,5,5,3,4,4,3,3,2,2,2,1,1
...	...	...	...

$$G = \frac{12!(5!)^2(4!)^3(3!)^2(2!)^3}{50!}$$

$$L = \lceil -\log G \rceil + 1 = 151 \text{ бит.}$$

Аппроксимация Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

$$\log N(\boldsymbol{\tau}) \approx nH\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{n}\right) - \frac{M-1}{2}\log(2\pi n)$$

$$\log N_\tau(n, M) \approx (M-1)\log(n+1)$$

Поэтому,

$$\bar{R} \approx H + \frac{M-1}{2}\frac{\log n}{n} + \frac{const}{n} \xrightarrow{n\to\infty} H$$

Это минимальная достижимая избыточность.

Основные выводы:

1. Наиболее естественной выглядит реализация нумерационного кодирования при помощи арифметического кодирования.
2. Нумерационное кодирование, реализованное при помощи арифметического кодирования сводится к двухпроходному арифметическому кодированию с эффективной передачей частот символов во входном сообщении.

1. В нейросетевых задачах сжатия изображений распределение латентных коэффициентов моделируется при помощи нормального распределения[1] с параметрами (μ, σ^2).
2. Вероятность символа оценивается как

$$\hat{p}(x_i|\mu,\sigma) = \Phi\left(\frac{x_i + \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \frac{1}{2} - \mu}{\sigma}\right),$$

   где $\Phi(x)$ – кумулятивная функция нормального распределения с параметрами $(0, 1)$.
3. Необходимо идентично вычислять $\Phi(x)$ на стороне кодера и декодера.

[1] J.Balle et al., Variational image compression with a scale hyperprior, International Conference on Learning Representations, 2018

Для упрощения пусть $\mu = 0$:

1. Если на вход поступает вектор $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_N\}$ такой, что распределения каждого элемента различны, то вместо передачи вероятностей для каждого x_i передаётся только одно значение σ_i, т.е. декодеру передаётся последовательность $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_N\}$.
2. Непосредственная передача $\boldsymbol{\sigma}$ может потребовать много бит, поэтому применяется кодирование $\boldsymbol{\sigma}$ при помощи дополнительного гиперкодера:
   2.1 Вычисляется вектор $\boldsymbol{z} = \mathcal{H}(\boldsymbol{x}, \phi_h)$, где ϕ_h – обучаемые параметры гиперкодера, а вектор $\boldsymbol{z} = \{z_1, z_2, ..., z_M\}$, где $M < N$.
   2.2 Вектор $\boldsymbol{z}$ квантуется как $\hat{\boldsymbol{z}} = \mathcal{Q}(z)$ и сжимается, например, арифметическим кодером.
   2.3 Для сжатия $\boldsymbol{x}$ используется $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{z}}, \theta_h)$, где θ_h – обучаемые параметры гипердекодера.
3. Подход эффективен, если есть зависимость между параметрами распределения σ_i и σ_j.
4. При необходимости можно применить этот же подход и для сжатия вектора $\hat{\boldsymbol{z}}$.

- Кодеру не доступны сообщения, которые появятся в будущем, т.е., при кодировании x_i, сообщения $x_{i+1}, x_{i+2}, ...$ считаются неизвестными.
- По последовательности уже закодированных сообщений $x_0, x_1, ..., x_{i-1}$ кодер оценивает вероятность для символа x_i и строит для него код в соответствии с этой оценкой.
- После декодирования сообщений $x_0, x_1, ..., x_{i-1}$ декодер оценивает вероятность для символа x_i так же как и кодер, после чего декодирует x_i.

Пусть необходимо передать $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ арифметическим кодером. Для этого каждому символу x_t необходимо сопоставить $\hat{p}_t(a)$ – оценку вероятности того, что $x_t = a, a = 1, ..., M$. Предположим, что $x_1, ..., x_{t-1}$ уже переданы и известны декодеру. Тогда

Пусть необходимо передать $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ арифметическим кодером. Для этого каждому символу x_t необходимо сопоставить $\hat{p}_t(a)$ – оценку вероятности того, что $x_t = a, a = 1, ..., M$. Предположим, что $x_1, ..., x_{t-1}$ уже переданы и известны декодеру. Тогда

$$\hat{p}_t(a) = \frac{\tau_t(a)}{t}, \text{где } \tau_t(a) \text{ число сивмолов } a \text{ в } x_1, ..., x_{t-1}.$$

Пусть необходимо передать $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ арифметическим кодером. Для этого каждому символу x_t необходимо сопоставить $\hat{p}_t(a)$ – оценку вероятности того, что $x_t = a, a = 1, ..., M$. Предположим, что $x_1, ..., x_{t-1}$ уже переданы и известны декодеру. Тогда

$$\hat{p}_t(a) = \frac{\tau_t(a)}{t}, \text{где } \tau_t(a) \text{ число сивмолов } a \text{ в } x_1, ..., x_{t-1}.$$

$$\hat{p}_t(a) = \frac{\tau_t(a) + 1}{t + M}, \text{поправка, чтобы избежать нулевых вероятностей.}$$

Пусть необходимо передать $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n)$ арифметическим кодером. Для этого каждому символу x_t необходимо сопоставить $\hat{p}_t(a)$ – оценку вероятности того, что $x_t = a, a = 1, ..., M$. Предположим, что $x_1, ..., x_{t-1}$ уже переданы и известны декодеру. Тогда

$$\hat{p}_t(a) = \frac{\tau_t(a)}{t}, \text{где } \tau_t(a) \text{ число сивмолов } a \text{ в } x_1, ..., x_{t-1}.$$

$$\hat{p}_t(a) = \frac{\tau_t(a) + 1}{t + M}, \text{поправка, чтобы избежать нулевых вероятностей.}$$

$$\hat{p}_t(a) = \frac{\tau_t(a) + 1/2}{t + M/2}.$$

IF_WE_CANNOT_DO_AS_WE_WOULD_WE_SHOULD_DO_AS_WE_CAN

$$\boldsymbol{\tau} = (12, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, ...)$$

t	x	$\hat{p}_t(a) = \frac{\tau_t(a)+1}{t+M}$	$\hat{p}_t(a) = \frac{\tau_t(a)+1/2}{t+M/2}$
0	I	(0+1)/(0+256)=1/256	(2* 0+1)/(2*0+256)=1/256
1	F	(0+1)/(1+256)=1/257	(2*0+1)/(2*1+256)=1/258
2	_	(0+1)/(2+256)=1/258	(2*0+1)/(2*2+256)=1/260
3	W	(0+1)/(3+256)=1/259	(2*0+1)/(2*3+256)=1/262
4	E	(0+1)/(4+256)=1/260	(2*0+1)/(2*4+256)=1/264
5	_	(1+1)/(5+256)=2/261	(2*1+1)/(2*5+256)=3/266
...	...	...	...
12	_	(2+1)/(12+256)=3/268	(2*2+1)/(2*12+256)=5/280
...	...	...	...
15	_	(3+1)/(15+256)=4/271	(2*3+1)/(2*15+256)=7/286
...	...	...	...
49	_	(2+1)/(49+256)= 3/305	(2*2+1)/(2*49+256)= 5/354

1. $\hat{p}_t(a) = \frac{\tau_t(a)+1}{t+M}$
   - $G = 1 \cdot \frac{1}{256} \cdot \frac{1}{257} \cdot \frac{1}{258} \cdot \frac{1}{259}\frac{1}{260} \cdot \frac{2}{261} \cdots = \frac{12!(5!)^2(4!)^3(3!)^2(2!)^3}{256 \cdot 257 \cdot \cdots \cdot 305}$.
   - $L = \lceil -\log G \rceil + 1 = 343$ бит.
2. $\hat{p}_t(a) = \frac{\tau_t(a)+1/2}{t+M/2}$
   - $G = 1 \cdot \frac{1}{256} \cdot \frac{1}{258} \cdot \frac{1}{260} \cdot \frac{1}{262} \cdot \frac{1}{264} \cdot \frac{3}{266} \cdots = \frac{(23)!!(9!!)^2(7!!)^3(5!!)^2(3!!)^3}{256 \cdot 258 \cdot \cdots \cdot 354}$.
   - $L = \lceil -\log G \rceil + 1 = 323$ бит.

- Можно использовать подход основанный на так называемом esc-символе.
- В этом случае, мы добавляем дополнительный символ в алфавит. Этот символ передаётся, если на вход приходит символ, который ранее не появлялся.

Общая идея:

- Используется оценка $p_t(a) = \frac{\tau_t(a)}{t+1}$, если $\tau_t(a) > 0$.
- Передаётся “esc”, если $\tau_t(a) = 0$, $p_t(esc) = \frac{1}{t+1}$

Алгоритм A:

$$\hat{p}_t(a) = \begin{cases} \frac{\tau_t(a)}{t+1}, & \text{если } \tau_t(a) > 0; \\ \frac{1}{t+1}\frac{1}{M-M_t}, & \text{если } \tau_t(a) = 0, \end{cases}$$

M_t – число различных символов, встретившихся в последовательности длины t.

- В Алгоритме A появление *esc* символа оценивается с меньшей вероятностью, чем это происходит на начальном этапе кодирования. Поэтому, имеет смысл модифицировать оценки вероятностей так, чтобы увеличить вероятность $p_t(esc)$.

Алгоритм D:

$$\hat{p}_t(a) = \begin{cases} \frac{\tau_t(a)-1/2}{t}, & \text{если } \tau_t(a) > 0; \\ \frac{1}{M}, & \text{если } \tau_t(a) = 0, t = 0; \\ \frac{M_t}{2t}\frac{1}{M-M_t}, & \text{если } \tau_t(a) = 0, t > 0. \end{cases}$$

$$1 = \sum_{a=1}^{M_t}\left(\frac{\tau_t(a)-1/2}{t}\right)+p_t(esc) = \frac{1}{t}\left(\sum_{a=1}^{M_t}\tau_t(a) - \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{M_t}1\right)+p_t(esc) = 1-\frac{M_t}{2t}+p_t(esc).$$

IF_WE_CANNOT_DO_AS_WE_WOULD_WE_SHOULD_DO_AS_WE_CAN

$\boldsymbol{\tau} = (12, 5, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 0, ...)$

t	x	$\hat{p}_A$	$\hat{p}_D$
0	I	$1\frac{1}{256}$	$\frac{1}{256}$
1	F	$\frac{1}{2}\frac{1}{255}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{255}$
2	_	$\frac{1}{3}\frac{1}{254}$	$\frac{2}{4}\frac{1}{254}$
3	W	$\frac{1}{4}\frac{1}{253}$	$\frac{3}{6}\frac{1}{253}$
4	E	$\frac{1}{5}\frac{1}{252}$	$\frac{4}{8}\frac{1}{253}$
5	_	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$
...	...	...	...
12	_	$\frac{2}{13}$	$\frac{3}{24}$
...	...	...	...
15	_	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{30}$
...	...	...	...
49	N	$\frac{2}{50}$	$\frac{3}{98}$

$$
\begin{aligned}
G_A &= \frac{11!(4!)^2(3!)^3(2!)^2(1!)^3}{50!} \cdot \frac{1}{256 \cdot 255 \cdot \ldots \cdot 242} \\
L_A &= \lceil -\log G_A \rceil + 1 = 291 \text{ бит.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_D &= \frac{(2 \cdot 12 - 3)!!((2 \cdot 5 - 3)!!)^2((2 \cdot 4 - 3)!!)^3((2 \cdot 3 - 3)!!)^2}{98!!} \\
&\times \frac{14!}{256 \cdot 255 \cdot \ldots \cdot 242} \\
L_D &= \lceil -\log G_2 \rceil + 1 = 287 \text{ бит,}
\end{aligned}
$$

где

$$
n!! = \begin{cases} 1 \cdot 3 \ldots \cdot n, & n - \text{нечетные.} \\ 2 \cdot 4 \ldots \cdot n, & n - \text{четные.} \end{cases}
$$

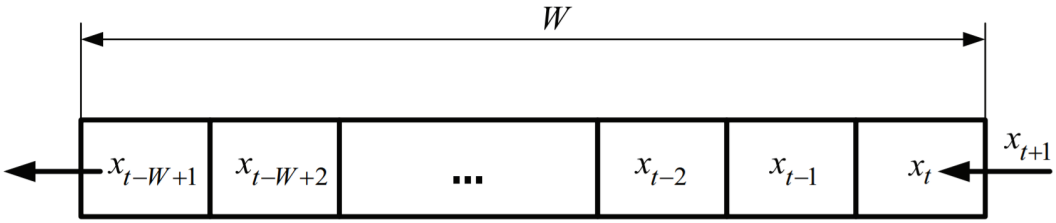
Theorem

При кодировании дискретного постоянного источника с энтропией H, средняя скорость адаптивного арифметического кодирования удовлетворяет неравенству

$$\bar{R} \leq H + \frac{M}{2}\frac{\log(n+1)+K}{n},$$

где K не зависит от длины последовательности n.

Алгоритм	Количество проходов	Битовые затраты
Двухпроходное кодирование кодом Хаффмана	2	317
Нумерационное кодирование	2	298
Адаптивное арифметическое кодирование, $\hat{p}_A$	1	291
Адаптивное арифметическое кодирование, $\hat{p}_D$	1	287
7z	1	289-296



$$\hat{p}_t(a) = \frac{\tau_t(a) + 1}{W + 1}.$$

- Обозначим через s_t количество единиц в скользящем окне после кодирования t символов.
- Можно не хранить окно в памяти, а s_t аппроксимировать следующим образом:
  1. Из окна удаляется среднее число единиц:
  $$s_{t+1} \leftarrow s_t - \frac{s_t}{W}.$$
  2. Новый символ добавляется в окно:
  $$s_{t+1} \leftarrow s_{t+1} + x_t.$$

Итоговое правило обновления:

$$s_{t+1} = \left(1 - \frac{1}{W}\right) \cdot s_t + x_t.$$

$$\begin{cases} \hat{p}_s = (1-\gamma)\hat{p}_{s-1}, \text{ where } s = 1, ..., 63, \hat{p}_0 = 0.5, \\ \gamma = 1 - \left(\dfrac{\hat{p}_{min}}{0.5}\right)^{\frac{1}{63}}, \hat{p}_{min} = 0.01875. \end{cases}$$

Оценка вероятности для символа x_{t+1} вычисляется как:

$$\hat{p}_{t+1} = \begin{cases} (1-\gamma)\hat{p}_t + \gamma, \text{ if } x_t = \text{LPS}, \\ \max\{(1-\gamma)\hat{p}_t, \hat{p}_{min}\}, \text{ if } x_t = \text{MPS}, \end{cases}$$

ИТМО

1: $T \leftarrow R \times p(x_t)$
2: $R \leftarrow R - T$
3: **if** $x_t = 1$ **then**
4: $\quad L \leftarrow L + R$
5: $\quad R \leftarrow T$
6: **end if**
7: *call* Ренормализация

1: $T \leftarrow R \times p(x_t)$
2: $R \leftarrow R - T$
3: **if** $F < R$ **then**
4: $\quad x_t = 0$
5: **else**
6: $\quad L \leftarrow L + R$
7: $\quad R \leftarrow T$
8: $\quad x_t = 1$
9: **end if**
10: *call* Ренормализация

1: **while** $R < 2^{b-2}$ **do**
2: **if** $L \geq 2^{b-1}$ **then**
3: $WriteOnes(1)$
4: $WriteZeros(bits\_to\_follow)$, $bits\_to\_follow \leftarrow 0$
5: $L \leftarrow L - 2^{b-1}$
6: **else if** $L < 2^{b-2}$ **then**
7: $WriteZeros(1)$
8: $WriteOnes(bits\_to\_follow)$, $bits\_to\_follow \leftarrow 0$
9: **else**
10: $bits\_to\_follow \leftarrow bits\_to\_follow + 1$
11: $L \leftarrow L - 2^{b-2}$
12: **end if**
13: $L \leftarrow L \ll 1$, $R \leftarrow R \ll 1$
14: **end while**

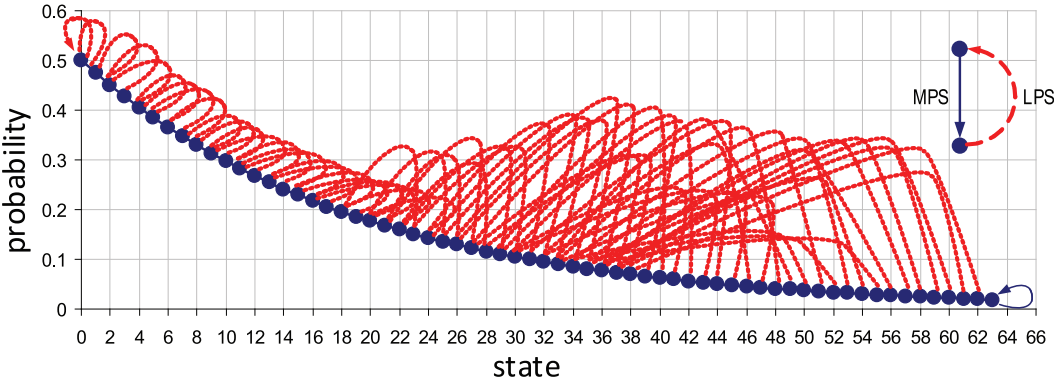
После ренормализации регистр R находится в интервале:

$$\frac{1}{2}2^{b-1} \leq R < 2^{b-1}.$$

Поэтому умножением может быть аппроксимировано следующим образом:

$$T = R \times \hat{p}_t \approx \alpha 2^{b-1} \times \hat{p}_t,$$

где $\alpha \in [\frac{1}{2}, ..., 1)$. Для улучшения точности M-coder квантует интервал $[\frac{1}{2}2^{b-1}; 2^{b-1})$ равномерно на 4 интервала. Затем, для каждого из четырёх интервалов результат умножения $R \times \hat{p}_s$ помещается в таблицу $TabRangeLPS[s][\Delta]$, состоящую из 64×4 значений.


probability
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66
state
MPS
LPS

1: $\Delta \leftarrow (R - 2^{b-2}) \gg (b-4)$
2: $T \leftarrow TabRangeLPS[s][\Delta]$
3: $R \leftarrow R - T$
4: **if** $x_i \neq$ MPS **then**
5: $L \leftarrow L+R$
6: $R \leftarrow T$
7: **if** $s = 0$ **then**
8: MPS $\leftarrow$!MPS;
9: **end if**
10: $s \leftarrow TransStateLPS[s]$
11: **else**
12: $s \leftarrow TransStateMPS[s]$
13: **end if**
14: *call* Renormalization procedure[2]

[2]D. Marpe, T. Wiegand, "A Highly Efficient Multiplication-Free Binary Arithmetic Coder and Its Application in Video Coding," IEEE ICIP, 2003.

Умножим[3] обе части правила на $\alpha 2^{b-1}$:

$$s'_{t+1} = \left(1 - \frac{1}{W}\right) \cdot s'_t + \alpha 2^{b-1} x_t,$$

где $s'_t = \alpha 2^{b-1} s_t$. Целочисленная реализация:

$$s'_{t+1} = \begin{cases} s'_t + \left\lfloor \dfrac{\alpha 2^{b-1} 2^w - s'_t + 2^{w-1}}{2^w} \right\rfloor, \text{ if } x_t = 1 \\ s'_t - \left\lfloor \dfrac{s'_t + 2^{w-1}}{2^w} \right\rfloor, \text{ if } x_t = 0, \end{cases}$$

Тогда умножение может быть аппроксимировано следующим образом:

$$T = R \times \hat{p}_t \approx \alpha 2^{b-1} \times \hat{p}_t = \frac{s'_t}{2^w}.$$

[3] E.Belyaev, A.Turlikov, K.Egiazarian and M.Gabbouj, An efficient adaptive binary arithmetic coder with low memory requirement // IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing. Special Issue on Video Coding: HEVC and beyond, 2013.

Для увеличения точности аппроксимации интервал $[\frac{1}{2}2^{b-1}; 2^{b-1})$ квантуется на 4 подинтервала:

$$\left\{ \frac{9}{16}2^{b-1}, \frac{11}{16}2^{b-1}, \frac{13}{16}2^{b-1}, \frac{15}{16}2^{b-1} \right\}.$$

Для этого сначала вычисляется s'_t для $\alpha = \frac{9}{16}$. Затем, умножение аппроксимируется как:

$$T = R \times \hat{p}_t \approx \frac{s'_t + \Delta \times \frac{1}{4}s'_t}{2^w}, \text{ where } \Delta = \frac{R - 2^{b-2}}{2^{b-4}}.$$

1: $\Delta \leftarrow (R - 2^{b-2}) \gg (b-4)$
2: $T \leftarrow (s + \Delta \times (s \gg 2)) \gg w$
3: $T \leftarrow \max(1, T)$
4: $R \leftarrow R - T$
5: **if** $x_i \neq$ MPS **then**
6: $L \leftarrow L+R$
7: $R \leftarrow T$
8: $s \leftarrow s + ((\alpha 2^{b-1} 2^w - s + 2^{w-1}) \gg w)$
9: **if** $s > \alpha 2^{b-2} 2^w$ **then**
10: MPS $\leftarrow$!MPS;
11: $s \leftarrow \alpha 2^{b-2} 2^w$;
12: **end if**
13: **else**
14: $s \leftarrow s - ((s + 2^{w-1}) \gg w)$
15: **end if**
16: *call* Renormalization procedure

ITMO more than a UNIVERSITY

Спасибо за внимание!