Современная теория информации

Лекция 4. Арифметическое кодирование

Беляев Евгений Александрович
eabelyaev@itmo.ru

Содержание лекции

ИТМО

1. Код Шеннона.
2. Код Гилберта-Мура.
3. Блоковое кодирование.
4. Прямая и обратная теоремы кодирования стационарных источников.
5. Арифметическое кодирование.

Рассмотрим ансамбль $X = \{1, 2, \ldots, M\}$ с вероятностями $\{p_1, p_2, \ldots, p_M\}$. Предположим, что $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_M$. Для каждого $x \in X$ вычислим *кумулятивную вероятность* как

$$q_1 = 0$$

$$q_i = \sum_{j=1}^{i-1} p_j, \; i = 2, \ldots, M.$$

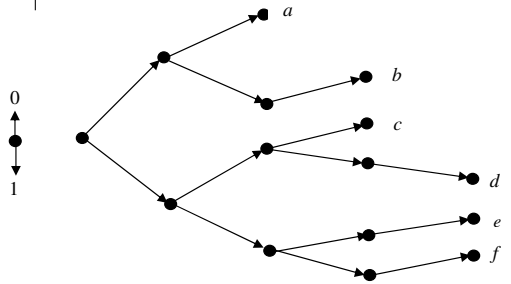
Кодовое слово кода Шеннона[1] для x_i – двоичная запись первых $l_i = \lceil -\log p_i \rceil$ бит после запятой двоичного представления q_i .

[1] C.E. Shannon, A Mathematical Theory of Communication, The Bell System Technical Journal, 1948

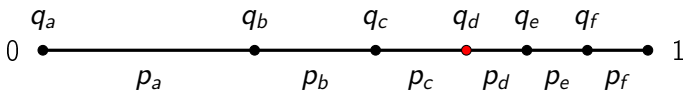
x	$p(x)$	$q(x)$	$l(x)$	$c(x)$
a	0.35	0	2	00...
b	0.20	0.35	3	010...
c	0.15	0.55	3	100...
d	0.1	0.70	4	1011...
e	0.1	0.80	4	1100...
f	0.1	0.90	4	1110...

$$\bar{l} = \sum_x p(x)l(x) = 2.95 > H = 2.4016$$

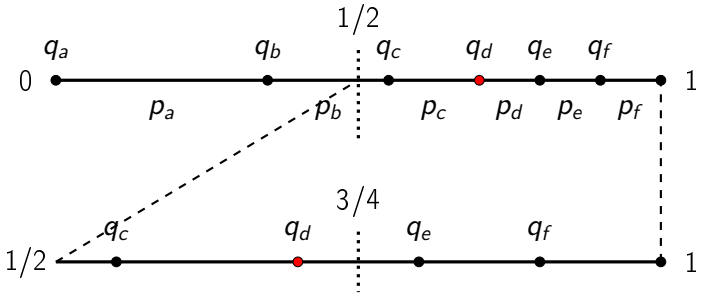
x	$p(x)$	$q(x)$	$l(x)$	$c(x)$
a	0.35	0	2	00...
b	0.20	0.35	3	010...
c	0.15	0.55	3	100...
d	0.1	0.70	4	1011...
e	0.1	0.80	4	1100...
f	0.1	0.90	4	1110...



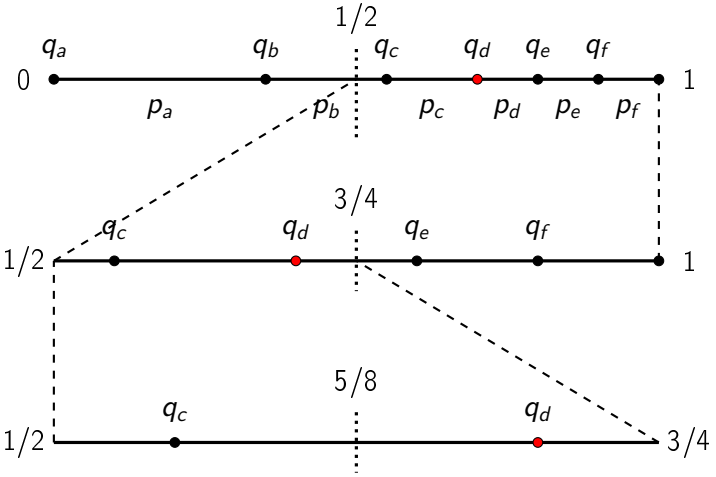
$x = d;\ q(x) = 0.7$



$x = d;\ q(x) = 0.7$



$x = d;\ q(x) = 0.7$


1/2
q_a
q_b
q_c
q_d
q_e
q_f
0
1
p_a
p_b
p_c
p_d
p_e
p_f
3/4
q_c
q_d
q_e
q_f
1/2
1
5/8
q_c
q_d
1/2
3/4

- $l_i = \lceil -\log p_i \rceil < -\log p_i + 1$, то $\bar{l} < H + 1$

- $l_i = \lceil -\log p_i \rceil < -\log p_i + 1$, то $\bar{l} < H + 1$
- Код является префиксным: $l_i = \lceil -\log p_i \rceil \geq -\log p_i$, $\Rightarrow p_i \geq 2^{-l_i}$.
  $j > i$, $q_j - q_i \geq p_i \geq 2^{-l_i}$, $2^{-l_i} = 0.\underbrace{00\ldots01}_{l_i}$

  Поэтому $\boldsymbol{c}_i$ длины l_i отличается от $\boldsymbol{c}_j$ хотя бы в одном из разрядов $1 \ldots l_i$.

  Пример: $q(b) - q(a) = p(a) = 0.35 > 0.25$, $l(a) = 2$, $c(a) = 00$ и $c(b) = 01\ldots$

- $l_i = \lceil -\log p_i \rceil < -\log p_i + 1$, то $\bar{l} < H + 1$
- Код является префиксным: $l_i = \lceil -\log p_i \rceil \geq -\log p_i$, $\Rightarrow p_i \geq 2^{-l_i}$.
  $j > i$, $q_j - q_i \geq p_i \geq 2^{-l_i}$, $2^{-l_i} = 0.\underbrace{00\ldots01}_{l_i}$

  Поэтому $\boldsymbol{c}_i$ длины l_i отличается от $\boldsymbol{c}_j$ хотя бы в одном из разрядов $1 \ldots l_i$.

  Пример: $q(b) - q(a) = p(a) = 0.35 > 0.25$, $l(a) = 2$, $c(a) = 00$ и $c(b) = 01\ldots$
- Код Шеннона требует сортировки вероятностей.

x	$p(x)$	$q(x)$	$l(x)$	$c(x)$
a	0.1	0	4	0000...
b	0.3	0.1	2	00...
c	0.6	0.4	1	0...

x	$p(x)$	$q(x)$	$l(x)$	$c(x)$
a	0.1	0	4	0000...
b	0.3	0.1	2	00...
c	0.6	0.4	1	0...

Можно избежать сортировки используя код

Гилберта-Мура за счёт введения дополнительной избыточности.

Рассмотрим ансамбль $X = \{1, 2, \ldots, M\}$, $\{p(1), p(2), \ldots, p(M)\}$.
Для каждого $x \in X$ вычислим *модифицированную кумулятивную вероятность*

$$\sigma_i = q_i + \frac{p_i}{2},\ i = 1, 2, \ldots, M,$$

где $q_1 = 0$, $q_i = \sum_{j=1}^{i-1} p_j$. Кодовое слово[2] x_i – это двоичная последовательность, представляющая собой первые

$$l_i = \left\lceil -\log\left(\frac{p_i}{2}\right)\right\rceil$$

бит после запятой в двоичном представлении σ_i.

[2] E.N. Gilbert and E.F. Moore, Variable-length binary encodings, *Bell System Technical Journal*, 1959.

x	$p(x)$	$q(x)$	$\sigma(x)$	$l(x)$	$c(x)$
a	0.35	0	0.175	3	001...
b	0.20	0.35	0.450	4	0111...
c	0.15	0.55	0.625	4	1010...
d	0.1	0.70	0.750	5	11000...
e	0.1	0.80	0.850	5	11011...
f	0.1	0.90	0.950	5	11110...

$$\bar{l} = \sum_x p(x)l(x) = 3.95 > H = 2.4016$$

- Код является префиксным: для $i < j, \sigma_j > \sigma_i$

$$\begin{aligned}\sigma_j - \sigma_i &= \sum_{h=1}^{j-1} p_h + \frac{p_j}{2} - \sum_{h=1}^{i-1} p_h - \frac{p_i}{2} = \sum_{h=i}^{j-1} p_h + \frac{p_j - p_i}{2} \geq p_i + \frac{p_j - p_i}{2} = \\ &= \frac{p_j + p_i}{2} \geq \frac{\max\{p_i, p_j\}}{2} \geq 2^{-\min\{l_i, l_j\}},\end{aligned}$$

где

$$l_m = \left\lceil -\log \frac{p_m}{2} \right\rceil \geq -\log \frac{p_m}{2}.$$

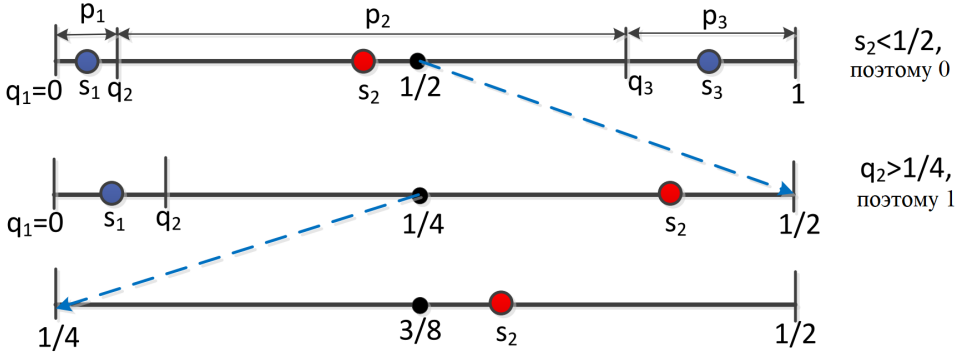
Это означает, что слова $\boldsymbol{c}_i$ и $\boldsymbol{c}_j$ различаются в одном из первых $\min\{l_i, l_j\}$ двоичных символов, т.е., ни одно из двух слов не может быть началом другого.

- Средняя длина кодового слова: $\bar{l} < H + 2$.

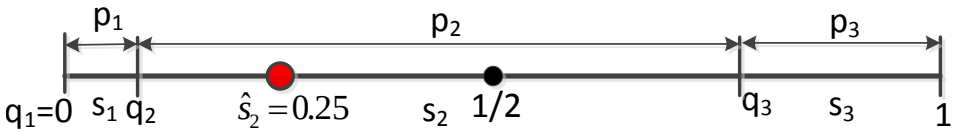
x	$p(x)$	$q(x)$	$\sigma(x)$	$l(x)$	$c(x)$
0	0.1	0.0	0.05	5	00001
1	0.6	0.1	0.4	2	01
2	0.3	0.7	0.85	3	110

- $X = \{x_1, x_2, x_3\},\ p(x_1) = 0.1, p(x_2) = 0.6, p(x_3) = 0.3$
- $q(x_1) = 0, q(x_2) = 0.1, q(x_3) = 0.7$
- $s(x_1) = 0.05, s(x_2) = 0.4, s(x_3) = 0.85$

Рассмотрим кодирование x_2.



- $p(x_1) = 0.1, p(x_2) = 0.6, p(x_3) = 0.3$
- $q(x_1) = 0, q(x_2) = 0.1, q(x_3) = 0.7$
- $s(x_1) = 0.05, s(x_2) = 0.4, s(x_3) = 0.85$
- Декодируем кодовое слово 01 или $\hat{s} = 0.25$.



- После округления до $l(x_i)$ разрядов, число $s(x_i) = q(x_i) + p(x_i)/2$ уменьшается не более чем на $p(x_i)/2$, поскольку ошибка округления не больше, чем $2^{-l(x_i)} \leq p(x_i)/2$.
- Декодирование: найти x_i, такое что $q(x_i) \leq \hat{s} < q(x_{i+1})$.

Чтобы уменьшить кодовую избыточность мы можем использовать блокове кодирование:

1. Пусть $x \in X = \{0, 1, \ldots, M-1\}$. Последовательность на выходе источника будем кодировать блоками $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
2. Каждый блок $\boldsymbol{x}$ длины n может рассматриваться как буква нового укрупнённого алфавита из всех комбинаций векторов длины n.
3. Применим любой алгорим побуквенного кодирования для укрупнённого алфавита.

Энтропия укрупнённого алфавита:

$$H(X^n) = -\sum_{\boldsymbol{x} \in X^n} p(\boldsymbol{x}) \log_2 p(\boldsymbol{x}).$$

Пусть r_n – избыточность укрупнённого алфавита, тогда $\bar{l} = H(X^n) + r_n$. Средние затраты на символ исходного алфавита:

$$\bar{R} = \frac{H(X^n) + r_n}{n} = \frac{H(X^n)}{n} + \frac{r_n}{n}.$$

- Для источника без памяти $H(X^n) = nH(X)$ получим:

$$\bar{R} = H(X) + \frac{r_n}{n}.$$

Если $n \to \infty$, то $\frac{r_n}{n} \to 0$.

- Для источника с памятью $H(X^n) \leq nH(X)$, и поэтому $\frac{H(X^n)}{n} \leq H(X)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(X^n)}{n} = H_\infty(X)$$

Теорема.

- Обратная: $\bar{R} \geq H_\infty(X)$
- Прямая: Для любого $\epsilon > 0$ существует префиксный код с $\bar{R} \leq H_\infty(X) + \epsilon$

Доказательство.

- Для укрупнённых символов $\boldsymbol{x} \in X^n$, $\bar{l}_n \geq H(X^n)$.
- Для любого n существует код (например, Шеннона), такой что $\bar{l}_n \leq H(X^n) + 1$.
- $R_n = \bar{l}_n / n \geq H(X^n)/n \geq H_\infty(X)$ для всех n
- Для $n \geq n_0$ и $\epsilon > 0$ $R_n \leq H_\infty(x) + \epsilon$

1. Код Хаффмана для укрупнённого алфавита сложно использовать на практике. Если $|X| = 256$, то для $n = 2$ $|X^n| = 65536$.
2. Код Шеннона сложно использовать, так как он требует сортировки.
3. Код Гилберта-Мура хорошо подходит для кодирования блоков.
4. Арифметическое кодирование является обобщением кода Гилберта-Мура для случая блокового кодирования.

Для $\boldsymbol{x} \in X^n$ вычислим[3][4]:

1. $p(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i)$
2. $q(\boldsymbol{x})$
3. $\sigma(\boldsymbol{x}) = q(\boldsymbol{x}) + p(\boldsymbol{x})/2$
4. $l(\boldsymbol{x}) = \lceil -\log p(\boldsymbol{x}) + 1 \rceil$

[3] J.J. Rissanen, Generalized Kraft Inequality and Arithmetic Coding, *IBM Journal of Research and Development*, 1976

[4] J. Rissanen and G. G. Langdon, Arithmetic Coding, *IBM Journal of Research and Development*, 1979

1. Пронумеруем все последовательности из X^n в алфавитном (лексикографическом) порядке.
2. Пусть i – наименьший индекс такой, что $x_i \neq y_j$, тогда $\boldsymbol{y}$ лексикографически предшествует $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$) если $x_i \prec y_i$.
3. apple $\prec$ energy $\prec$ entropy

0000
0001
0010
0011
0100
0101
0110
0111
1000
1001
...

Обозначим $q(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{y} \prec \boldsymbol{x}} p(\boldsymbol{y})$. Эта куммулятивная вероятность может быть вычислена рекурсивно:

$$
\begin{aligned}
q(\boldsymbol{x}_1^n) &= \sum_{\boldsymbol{y}_1^n \prec \mathrm{x}_1^n} p(\boldsymbol{y}_1^n) = \\
&= \sum_{\boldsymbol{y}_1^{n-1} \prec \boldsymbol{x}_1^{n-1}} \sum_{y_n} p(\boldsymbol{y}_1^{n-1} y_n) + \sum_{\boldsymbol{y}_1^{n-1} = \mathrm{x}_1^{n-1}} \sum_{y_n \prec x_n} p(\boldsymbol{y}_1^{n-1} y_n) = \\
&= \sum_{\boldsymbol{y}_1^{n-1} \prec \boldsymbol{x}_1^{n-1}} p(\boldsymbol{y}_1^{n-1}) + \sum_{\boldsymbol{y}_1^{n-1} = \boldsymbol{x}_1^{n-1}} p(\boldsymbol{y}_1^{n-1}) \sum_{y_n \prec x_n} p(y_n) = \\
&= q(\boldsymbol{x}_1^{n-1}) + p(\boldsymbol{x}_1^{n-1}) q(x_n)
\end{aligned}
$$

В итоге получим следующие рекуррентные формулы[5]:

$$q(\boldsymbol{x}_{[1,n]}) = q(\boldsymbol{x}_{[1,n-1]}) + p(\boldsymbol{x}_{[1,n-1]})q(x_n),$$

$$p(\boldsymbol{x}_{[1,n]}) = p(\boldsymbol{x}_{[1,n-1]})p(x_n).$$

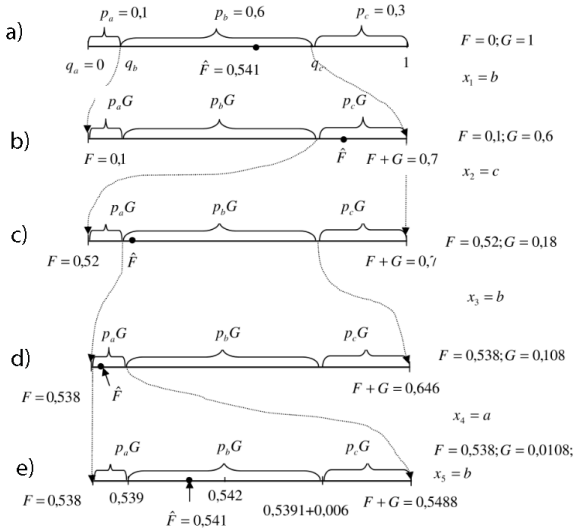
[5] R. Pasco, Source coding algorithms for fast data compression, *Diss. Stanford University*, 1976.

Input: $M, \{p_1, ..., p_M\},\ n,\ \{x_1, ..., x_n\}$

1: $q_1 \leftarrow 0$
2: **for** $i = 2, .., M$ **do**
3: $\quad q_i \leftarrow q_{i-1} + p_{i-1}$
4: **end for**
5: $F \leftarrow 0, G \leftarrow 1$
6: **for** $i = 1, .., n$ **do**
7: $\quad F \leftarrow F + q(x_i)G$
8: $\quad G \leftarrow p(x_i)G$
9: **end for**

Output: $\boldsymbol{c} \leftarrow$ первые $\lceil -\log G \rceil + 1$ бит двоичной записи $F + G/2$.

Шаг i	x_i	$p(x_i)$	$q(x_i)$	F	G
0	-	-	-	0,0000	1,0000
1	b	0,6	0,1	0,1000	0,6000
2	c	0,3	0,7	0,5200	0,1800
3	b	0,6	0,1	0,5380	0,1080
4	a	0,1	0,0	0,5380	0,0108
5	b	0,6	0,1	0,5391	0,0065
6	Длина кодового слова $\lceil -\log G + 1 \rceil = 9$ Кодовое слово $F + G/2 = 0,5423... \rightarrow$ $\rightarrow \hat{F} = 0,541 \rightarrow 100010101$				


a)
$p_a = 0{,}1$
$p_b = 0{,}6$
$p_c = 0{,}3$
$q_a = 0$
q_b
$\hat{F} = 0{,}541$
q_c
1
$F = 0; G = 1$
$x_1 = b$
b)
p_aG
p_bG
p_cG
$F = 0{,}1$
$\hat{F}$
$F + G = 0{,}7$
$F = 0{,}1; G = 0{,}6$
$x_2 = c$
c)
p_aG
p_bG
p_cG
$F = 0{,}52$
$\hat{F}$
$F + G = 0{,}7$
$F = 0{,}52; G = 0{,}18$
$x_3 = b$
d)
p_aG
p_bG
p_cG
$F = 0{,}538$
$\hat{F}$
$F + G = 0{,}646$
$F = 0{,}538; G = 0{,}108$
$x_4 = a$
e)
p_aG
p_bG
p_cG
$F = 0{,}538$
0,539
0,542
$\hat{F} = 0{,}541$
0,5391+0,006
$F + G = 0{,}5488$
$F = 0{,}538; G = 0{,}0108;$
$x_5 = b$

Input: $M, \{p_1, ..., p_M\}$, n, $\hat{F}$

1: $q_1 \leftarrow 0$
2: **for** $i = 2, .., M$ **do**
3: $\quad q_i \leftarrow q_{i-1} + p_{i-1}$
4: **end for**
5: $q_{M+1} \leftarrow 1, S \leftarrow 0, G \leftarrow 1$
6: **for** $i = 1, .., n$ **do**
7: $\quad j \leftarrow 1$
8: $\quad$ **while** $S + q_{j+1}G < \hat{F}$ **do**
9: $\quad\quad j \leftarrow j + 1$
10: $\quad$ **end while**
11: $\quad S \leftarrow S + q_j G$
12: $\quad G \leftarrow p_j G$
13: $\quad x_i \leftarrow j$
14: **end for**

Output: $\{x_1, ..., x_n\}$

Шаг	S	G	Гипотеза x	$q(x)$	$S + qG$	Решение x_i	$p(x)$
0	$10001010 1 \rightarrow \hat{F} = 0,541$						
1	0,0000	1,0000	a	0,0	$0,0000 < \hat{F}$	b	0,6
			b	0,1	$\mathbf{0,1000} < \hat{F}$		
			c	0,7	$0,7000 > \hat{F}$		
2	0,1000	0,6000	a	0,0	$0,1000 < \hat{F}$	c	0,3
			b	0,1	$0,1600 < \hat{F}$		
			c	0,7	$\mathbf{0,5200} < \hat{F}$		
3	0,5200	0,1800	a	0,0	$0,5200 < \hat{F}$	b	0,6
			b	0,1	$\mathbf{0,5380} < \hat{F}$		
			c	0,7	$0,6460 > \hat{F}$		
4	0,5380	0,1080	a	0,0	$\mathbf{0,5380} < \hat{F}$	a	0,1
			b	0,1	$0,5488 > \hat{F}$		
5	0,5380	0,0108	a	0,0	$0,5380 < \hat{F}$	b	0,6
			b	0,1	$\mathbf{0,5391} < \hat{F}$		
			c	0,7	$0,5456 > \hat{F}$		

- Проблемы:
  1. Разрядность регистров: Количество бит, необходимое для F и G растёт с каждым умножением на вероятность.
  2. Задержка: кодовое слово формируется после кодирования последнего символа.

- Проблемы:
  1. Разрядность регистров: Количество бит, необходимое для F и G растёт с каждым умножением на вероятность.
  2. Задержка: кодовое слово формируется после кодирования последнего символа.
- Решение:
  1. Представить входные вероятности при помощи целых чисел.
  2. Выдавать старшие разряды кодового слова, которые не будут меняться и сокращать разряды (ренормализовать), необходимые для F and G
  3. Использовать специальный счётчик “btf” (bits to follow), если старшие разряды кодового слова не определены на данном шаге. (...011111... или ...100000...)
- Результат: 16-битная реализация.

- Обозначим через L (*low*) регистр, в котором хранится F, через R (*range*) регистр, в котором хранится G и введем регистр $H = L + R$ (*high*)[6].
- В начале работы алгоритма $L = 0, H = 2^b - 1$, где b разрядность алгоритма.
- В результате операции $R = p_j R$ регистр R может обнулиться.
- Задача ренормализации держать регистры $H \geq \frac{3}{4}2^b$, $L \leq \frac{1}{4}2^b$, т.е. $R \geq \frac{1}{2}2^b$.

[6] I. H. Witten, R. M. Neal and J. G. Cleary, "Arithmetic Coding for Data Compression," Communications of the ACM, 1987.

Анализируем разряды числа $\sigma = L + \frac{R}{2} = \frac{L}{2} + \frac{H}{2}$.

1. $H < \frac{1}{2}2^b$.
   - Тогда $\sigma < \frac{1}{2}2^b$.
   - Выдаём 0.
   - $H = H \times 2$, $L = L \times 2$.
2. $H \geq \frac{1}{2}2^b$, $L \geq \frac{1}{2}2^b$
   - Тогда $\sigma > \frac{1}{2}2^b$.
   - Выдаём 1.
   - $H = H \times 2 - 2^b$, $L = L \times 2 - 2^b$.
3. $\frac{1}{2}2^b < H < \frac{3}{4}2^b$, $\frac{1}{4}2^b \leq L < \frac{1}{2}2^b$
   - Тогда $\sigma <> \frac{1}{2}2^b$ (неопределённость).
   - $btf = btf + 1$
   - $H = H \times 2 - \frac{1}{2}2^b$, $L = L \times 2 - \frac{1}{2}2^b$.

```
function y=int_arithm_encoder(x,q);
% x is input data sequence,
% q is cumulative distribution (model)
% y is binary output sequence

% Constants
k=16;
R4=2^(k-2); R2=R4*2; R34=R2+R4;% half,quarter,e
R=2*R2;                          % Precision

% Initialization
Low=0;        % Low
High=R-1;     % High
btf=0;        % Bits to Follow
y=[ ];        % code sequence

% Encoding
for i=1:length(x);
   Range=High-Low+1;
   High=Low+fix(Range*q(x(i)+1)/q(m))-1;
   Low=Low+fix(Range*q(x(i))/q(m));

   % Normalization
   while 1
      if High<R2
         y=[y 0 ones(1,btf)]; btf=0;
         High=High*2+1; Low=Low*2;
      else
         if Low>=R2
            y=[y 1 zeros(1,btf)]; btf=0;
            High=High*2-R+1; Low=Low*2-R;
         else
            if Low>=R4  &  High<R34
               High=2*High-R2+1; Low=2*Low-R2;
               btf=btf+1;
            else
               break;
            end;
         end;
      end;
   end; % while
end; % for

% Completing
if Low<R4
   y=[y 0 ones(1,btf+1)];
else
   y=[y 1 zeros(1,btf+1)];
end;
```

```
function x=int_arithm_decoder(y,q,n);
% y is binary encoded data sequence,
% q is cumulative distribution (model)
% x is output sequence
% n is number of messages to decode

% Constants
k=16; R4=2^(k-2); R2=R4*2; R34=R2+R4; R=2*R2;
m=length(q);

% Start decoding. Reading first k bits
Value=0; y=[y zeros(1,k)];
for ib=1:k
   Value=2*Value+y(ib);
end;

% Initialization
Low=0;  High=R-1;

% Decoding
for j=1:n
   Range=High-Low+1;
   aux=fix(( (Value-Low+1)*q(m)-1)/Range);
   i=1; % message index
   while q(i+1)<=aux, i=i+1; end;
   x(j)=i;
   High=Low+fix(Range*q(i+1)/q(m))-1;
   Low=Low+fix(Range*q(i)/q(m));

   % Normalization
   while 1
      if High<R2
         High=High*2+1; Low=Low*2;
         ib=ib+1;
         Value = 2*Value+y(ib);
      else
         if Low>=R2
            High=High*2-R+1; Low=Low*2-R;
            ib=ib+1;
            Value = 2*Value-R+y(ib);
         else
            if Low>=R4  &  High<R34
               High=2*High-R2+1;  Low=2*Low-R2;
               ib=ib+1;
               Value = 2*Value-R2+y(ib);
            else
               break;
            end;
         end;
      end
   end; % while
end; % for
```

1: $T \leftarrow R \times p(x_t)$
2: $R \leftarrow R - T$
3: **if** $x_t = 1$ **then**
4: $\quad L \leftarrow L + R$
5: $\quad R \leftarrow T$
6: **end if**
7: *call* Ренормализация

1: $T \leftarrow R \times p(x_t)$
2: $R \leftarrow R - T$
3: **if** $F < R$ **then**
4: $\quad x_t = 0$
5: **else**
6: $\quad L \leftarrow L + R$
7: $\quad R \leftarrow T$
8: $\quad x_t = 1$
9: **end if**
10: *call* Ренормализация

```
1: while R < 2^(b-2) do
2:     if L ≥ 2^(b-1) then
3:         WriteOnes(1)
4:         WriteZeros(bits_to_follow), bits_to_follow ← 0
5:         L ← L − 2^(b-1)
6:     else if L < 2^(b-2) then
7:         WriteZeros(1)
8:         WriteOnes(bits_to_follow), bits_to_follow ← 0
9:     else
10:        bits_to_follow ← bits_to_follow + 1
11:        L ← L − 2^(b-2)
12:    end if
13:    L ← L≪ 1, R ← R≪ 1
14: end while
```

После ренормализации регистр R находится в интервале:

$$\frac{1}{2}2^{b-1} \leq R < 2^{b-1}.$$

Поэтому умножением может быть аппроксимировано следующим образом:

$$T = R \times \hat{p}_t \approx \alpha 2^{b-1} \times \hat{p}_t,$$

где $\alpha \in [\frac{1}{2}, ..., 1)$. Для улучшения точности M-coder квантует интервал $[\frac{1}{2}2^{b-1}; 2^{b-1})$ равномерно на 4 интервала. Затем, для каждого из четырёх интервалов результат умножения $R \times \hat{p}_s$ помещается в таблицу $TabRangeLPS[s][\Delta]$, состоящую из 64×4 значений.

1: $\Delta \leftarrow (R - 2^{b-2}) \gg (b-4)$
2: $T \leftarrow TabRangeLPS[s][\Delta]$
3: $R \leftarrow R - T$
4: **if** $x_i \neq$ MPS **then**
5: $L \leftarrow L+R$
6: $R \leftarrow T$
7: **if** $s = 0$ **then**
8: MPS $\leftarrow$!MPS;
9: **end if**
10: $s \leftarrow TransStateLPS[s]$
11: **else**
12: $s \leftarrow TransStateMPS[s]$
13: **end if**
14: *call* Renormalization procedure[7]

[7] D. Marpe, T. Wiegand, "A Highly Efficient Multiplication-Free Binary Arithmetic Coder and Its Application in Video Coding," IEEE ICIP, 2003.

Байтовая ренормализация (range coder) для недвоичного[8] и двоичного[9] алфавита

```
1: while (L ⊕ (L + R)) < 2^24 or R < 2^16 do
2:     if R < 2^16 ∧ (L ⊕ (L + R)) ≥ 2^24 then
3:         R ← (!L + 1) ∧ (2^16 − 1)
4:     end if
5:     PUTBYTE (L ≫ 24)
6:     R ← R ≪ 8
7:     L ← L ≪ 8
8: end while
```

```
1: if (L ⊕ (L + R)) < 2^24 then
2:     PUTBYTE (L ≫ 24)
3:     R ← R ≪ 8
4:     L ← L ≪ 8
5: else if R < 2^16 then
6:     R ← (!L + 1) ∧ (2^16 − 1)
7:     PUTBYTE (L ≫ 24)
8:     R ← R ≪ 8
9:     L ← L ≪ 8
10: end if
```

[8] D.Subbotin, “Carryless Rangecoder,“ 1999.

[9] E.Belyaev, K.Liu, M.Gabbouj, Y.Li, An efficient adaptive binary range coder and its VLSI architecture // IEEE Trans. on Circuits and Systems for Video Technology, 2015.

$$C_A = \frac{\alpha_A \cdot N + \beta_A \cdot B}{N}, C_R = \frac{\alpha_R \cdot N + \frac{1}{8} \cdot \beta_R \cdot B}{N},$$

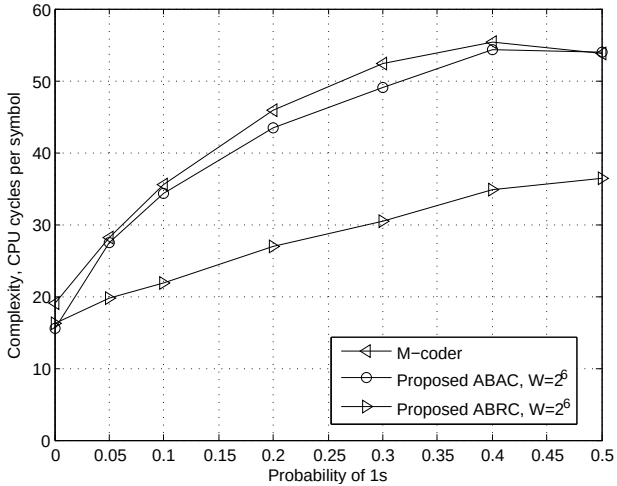
α – сложность обновления регистров R и L, β – сложность ренормализации, N – количество входных двоичных символов,
B – длина сжатого потока в битах:

$$B = N \cdot \Big(h(p) + r(p)\Big).$$

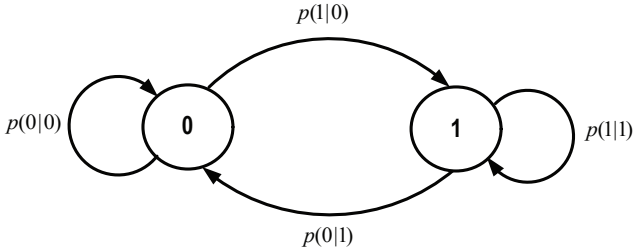
Предположим, что $\alpha_A \approx \beta_A \approx \alpha_R \approx \beta_R$, тогда

$$\frac{C_A(p) - C_R(p)}{C_A(p)} \approx \frac{\frac{7}{8} \cdot h(p)}{1 + h(p)} \in [0, ..., 0.4375].$$

Сравнение сложности кодера для разных вариантов ренормализации[10]



[10] E.Belyaev et al., Complexity analysis of adaptive binary arithmetic coding software implementations // The 11th International Conference on Next Generation Wired/Wireless Advanced Networking, 2011



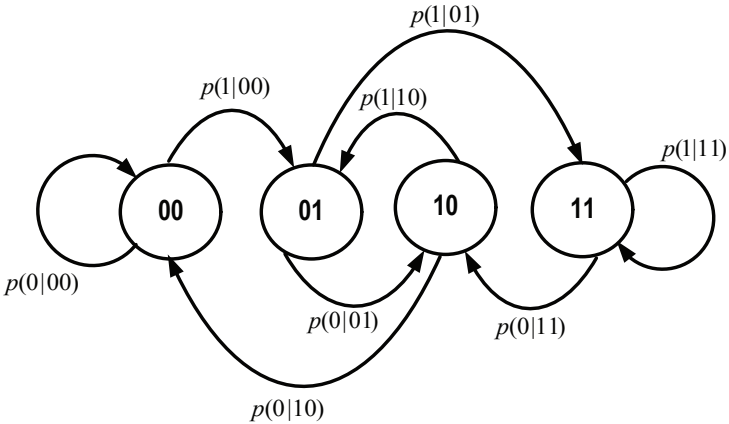
$$H(\omega) = \pi_0 \cdot H(s_0) + \pi_1 \cdot H(s_1),$$

$$\pi_0 = \frac{p(0|1)}{p(0|1) + p(1|0)}, \pi_1 = \frac{p(1|0)}{p(0|1) + p(1|0)}.$$

$$H(s_0) = -p(0|0) \cdot \log_2 p(0|0) - p(1|0) \cdot \log_2 p(1|0),$$
$$H(s_1) = -p(1|1) \cdot \log_2 p(1|1) - p(0|1) \cdot \log_2 p(0|1).$$

Input: $M = 2, \{p(1|0), p(1|1)\}$, n, $\{x_1, ..., x_n\}, s_0 = 0$

1: **for** $i = 1, ..., n$ **do**
2: **if** $s_{i-1} = 0$ **then**
3: $p(x_t) \leftarrow p(1|0)$
4: **else**
5: $p(x_t) \leftarrow p(1|1)$
6: **end if**
7: $T \leftarrow R \times p(x_t)$
8: $R \leftarrow R - T$
9: $s_i \leftarrow 0$
10: **if** $x_t = 1$ **then**
11: $L \leftarrow L + R$, $R \leftarrow T$
12: $s_i \leftarrow 1$
13: **end if**
14: *call* Ренормализация
15: **end for**


p(1|01)
p(1|00)
p(1|10)
p(1|11)
00
01
10
11
p(0|00)
p(0|01)
p(0|11)
p(0|10)

- Рассмотрим ансамбль $X = \{A, B, C, D\}$, с распределениями вероятностей p_A, p_B, p_C, p_D. Энтропия ансамбля:

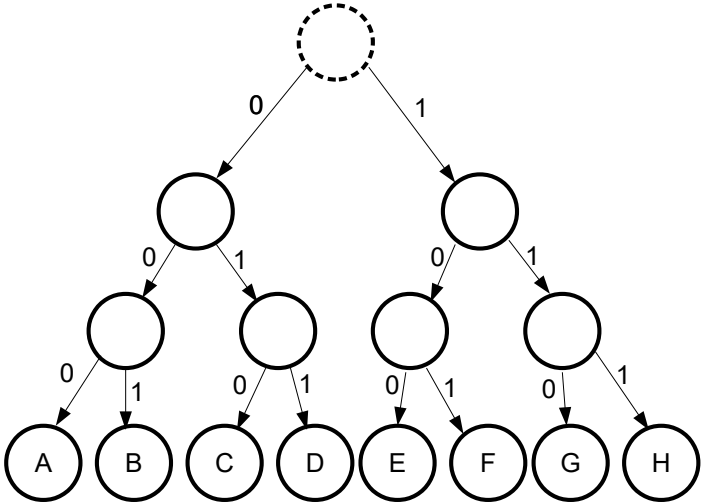
$$H = -p_A \log p_A - p_B \log p_B - p_C \log p_C - p_D \log p_D.$$

- Бинаризация равномерным кодом с независимым кодированием:

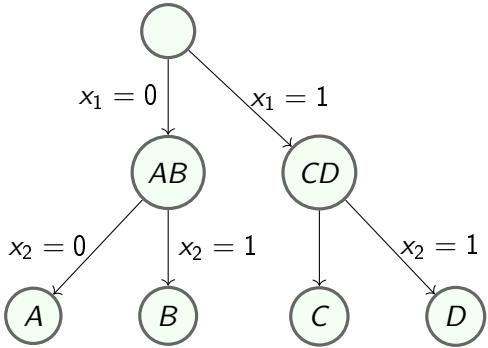
$$A \to 00$$
$$B \to 01$$
$$C \to 10$$
$$D \to 11$$

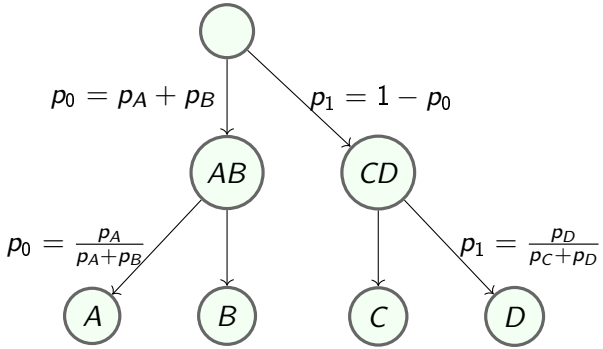
При независимом кодировании первого и второго символов:

$$H_1 = H(X_1) + H(X_2) \geq H(X_1) + H(X_2|X_1) = H.$$


0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
0
1
A
B
C
D
E
F
G
H

- Рассмотрим ансамбль $X = \{A, B, C, D\}$, с распределениями вероятностей p_A, p_B, p_C, p_D.





$h_1 = -(p_A + p_B)\log(p_A + p_B) - (p_C + p_D)\log(p_C + p_D)$
$h_2 = (p_A + p_B)(-\frac{p_A}{p_A+p_B}\log\frac{p_A}{p_A+p_B} - \frac{p_B}{p_A+p_B}\log\frac{p_B}{p_A+p_B}) +$
$+(p_C + p_D)(-\frac{p_C}{p_C+p_D}\log\frac{p_C}{p_C+p_D} - \frac{p_D}{p_C+p_D}\log\frac{p_D}{p_C+p_D}) =$
$H - h1.$
$\Rightarrow h_1 + h_2 = H.$

n	$unar(n)$
1	1
2	01
3	001
4	0001
5	00001
n	$\underbrace{00...0}_{n-1}1$

- Унарная бинаризация:

$$A \to 1$$
$$B \to 01$$
$$C \to 001$$
$$D \to 0001$$

$$h_1 = -p_A \log p_A - (1 - p_A) \log(1 - p_A).$$
$$h_2 = -\frac{p_B}{p_B+p_C+p_D} \log \frac{p_B}{p_B+p_C+p_D} - \frac{p_C+p_D}{p_B+p_C+p_D} \log \frac{p_C+p_D}{p_B+p_C+p_D}.$$
$$h_3 = -\frac{p_C}{p_C+p_D} \log \frac{p_C}{p_C+p_D} - \frac{p_D}{p_C+p_D} \log \frac{p_D}{p_C+p_D}.$$
$$h_4 = 0.$$

$$h_1 + (1 - p_A)h_2 + (1 - p_A - p_B)h_3 =$$
$$-p_A \log p_A - (1 - p_A) \log(1 - p_A) -$$
$$-p_B \log \frac{p_B}{p_B+p_C+p_D} - (p_C + p_D) \log \frac{p_C+p_D}{p_B+p_C+p_D} -$$
$$-p_C \log \frac{p_C}{p_C+p_D} - p_D \log \frac{p_D}{p_C+p_D} = H.$$

- Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_N\}$, $x_i \in \{0, 1\}$.

Кодер: $R \leftarrow 2 \cdot R + x_i$

i	x_i	R
–	–	1
1	0	2
2	1	5
3	1	11

Декодер: $x_i = R \mod 2$, $R \leftarrow \lfloor \frac{R}{2} \rfloor$

i	x_i	R
–	–	11
3	1	5
2	1	2
1	0	1

- Кодер работает в от последнего символа к первому (в реверсном порядке), декодер от первого к последнему.
- $p_0 = \frac{f(0)}{n}$, $p_1 = \frac{f(1)}{n}$, $f(0) = 1, f(1) = 1, n = 2, q(0) = 0$, $q(1) = \frac{f_0}{n}$.
- Кодер: $R \leftarrow \frac{n \cdot R}{f(x_i)} + n \cdot q(x_i) = \frac{R}{p_i} + n \cdot q(x_i)$
- Декодер:

$$x_i = \begin{cases} 0, \text{ если } R \wedge (n-1) < nq(1), \\ 1, \text{ иначе.} \end{cases} \quad R \leftarrow \lfloor p_i \cdot R \rfloor$$

- Кодер[11]: $R \leftarrow \frac{n \cdot R}{f(x_i)} + n \cdot q(x_i)$
- Декодер:

$$x_i = \begin{cases} 0, \text{ если } R \wedge (n-1) < nq(1), \\ 1, \text{ иначе.} \end{cases} \quad R \leftarrow \lfloor p_i \cdot R \rfloor$$

- $p_0 = \frac{f(0)}{n}$, $p_1 = \frac{f(1)}{n}$, $f(0) = 1, f(1) = 3, n = 4, q_0 = 0$, $q_1 = \frac{f_0}{n}$

i	x_i	R
–	–	1
1	0	4
2	1	6
3	1	9
4	1	13

i	x_i	R
–	–	13
4	1	9
3	1	6
2	1	4
1	0	1

[11] Jarek Duda, Asymmetric numeral systems: entropy coding combining speed of huffman coding with compression rate of arithmetic coding, rarXiv, 2014.

Properties of rANS:

- Длина кодового слова $\approx \lceil \log_2(R) \rceil + 1$.
- Правило изменения $R_i \approx R_{i-1}/p_i$, т.е. $\log_2(R_i) \approx \log_2(R_{i-1}) + \log_2(1/p_i)$.
- $\frac{R_{i-1}}{p_i} = \frac{n \cdot R_{i-1}}{f(x_i)}$ выполняется таблично[12] с двумя умножениями и сложениями.
- Алгоритм работает в двухпроходном режиме. На первом проходе вычисляются частоты $\{f(x_i)\}$ и соответствующие таблицы. На втором проходе выполняется кодирование статической моделью.
- Переменная R может переполниться, т.е. ренормализация необходима. При этом байтовая ренормализация проще, чем в арифметическом кодере.
  - rANS примерно в 4 раза быстрее ABRC на длинных последовательностях (более 4096 байт).
  - Если длина последовательности меньше 4096 байт, то rANS показывает ту же скорость (из-за вычисления модели и таблиц).

[12] R.Alverson, Integer division using reciprocals, *IEEE Symposium on Computer Arithmetic*, 1991

1: $f_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{i=N} x_i$
2: $f_0 \leftarrow \left\lfloor \frac{2^b \cdot (N - f_1)}{N} \right\rfloor, f_1 \leftarrow 2^b - f_0$
3: $r_0 \leftarrow f_0 \cdot 2^{23-b+8}, r_1 \leftarrow f_1 \cdot 2^{23-b+8}$
4: $r \leftarrow 2^{23}$
5: **for** $i = N, ..., 1$ **do**
6: **if** $x_i = 0$ **then**
7: RENORM(r_0, r)
8: $r \leftarrow \lfloor r/f_0 \rfloor \cdot 2^b + r \mod f_0$
9: **else**
10: RENORM(r_1, r)
11: $r \leftarrow \lfloor r/f_1 \rfloor \cdot 2^b + f_0 + r \mod f_1$
12: **end if**
13: **end for**
14: WRITE(r,32)
15: WRITE(f_0, b)

1: RENORM(x, r)
2: **if** $r \geq x$ **then**
3: **repeat**
4: WRITE($r \wedge 255$,8)
5: $r \leftarrow (r \gg 8)$
6: **until** $r \geq x$
7: **end if**

1: $f_0 \leftarrow \text{READ}(b),\ f_1 \leftarrow 2^b - f_0$
2: $r = \text{READ}(32)$
3: **for** $i = 1, ..., N$ **do**
4: **if** $r \wedge (2^b - 1) < f_0$ **then**
5: $x_i \leftarrow 0$
6: $r \leftarrow f_0 \times (r \gg 8) + r \wedge (2^b - 1)$
7: **else**
8: $x_i \leftarrow 1$
9: $r \leftarrow f_1 \times (r \gg 8) + r \wedge (2^b - 1) - f_0$
10: **end if**
11: **if** $r < 2^{23}$ **then**
12: **repeat**
13: $r \leftarrow (r \ll 8) + \text{READ}(8)$
14: **until** $r < 2^{23}$
15: **end if**
16: **end for**

ITMO more than a UNIVERSITY

Спасибо за внимание!